2 bladen

1a Het principe van volledige inductie gaat in twee stappen
Stap 1 Het inductie begin: Toon aan dat ~~een~~ de uitdrukking
$U(n)$ waar is voor $n=1$
2: Inductiestap Neem aan dat $U(n)$ waar is voor $n \in \mathbb{N}$
Bewijs dat $U(n+1)$ ~~ook~~ waar is met $n \in \mathbb{N}$
5 Indien deze twee stappen zijn gelukt is het bewijs geleverd
dat uitdrukking $U(n)$ waar is, met behulp van volledige inductie

b $\cancel{n^3+2n=3k}$ met $n,k \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$ $\forall n \exists k: n^3+2n=3k$
1 inductiebegin $n=1$ $1^3+2\cdot 1 = 3 = 3\cdot 1$ voor $n=1$ is er een k
namelijk $k=1$
2 inductiestap aanname: $n^3+2n=3k$ $k \in \mathbb{N}$
te bewijzen $(n+1)^3+2(n+1)=3l$ $l \in \mathbb{N}$
8 bewijs $(n+1)^3+2(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+2n+2$
$= (n^3+2n)+3n^2+3n+3$
$= 3k+3n^2+3n+3 = 3(k+n^2+n+1)$
$(k+n^2+n+1) \in \mathbb{N}$ dus is er een l namelijk $l = k+n^2+n+1$
Dus m.b.v. volledige inductie is bewezen dat n^3+2n deelbaar is door 3, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

2 $(z+1)^3 = -2-2i$

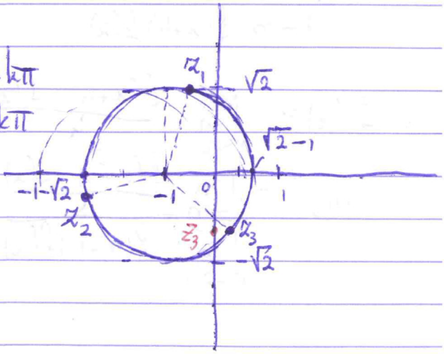
~~Stel $z = re^{i\theta}$~~ Stel $z+1 = re^{i\theta}$

~~$(re^{i\theta}+1)^3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$~~
~~$r^3e^{3i\theta}+$~~

$(z+1)^3 = r^3e^{3i\theta} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi+2k\pi i}$

9 $r^3 = 2\sqrt{2}$ $\wedge$ $3\theta = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$
$r = \sqrt{2}$ $\wedge$ $\theta = \frac{5}{12}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

$z+1 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i + \frac{2}{3}k\pi i}$
$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i} - 1$
$z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i + \frac{2}{3}\pi i} - 1 = \sqrt{2}e^{\frac{13}{12}\pi i} - 1$
$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5}{12}\pi i - \frac{2}{3}\pi i} - 1 = \sqrt{2}e^{-\frac{3}{12}\pi i} - 1$



a $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ netjes!

b $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| < \varepsilon$

Omdat x in de buurt van 0 moet liggen kunnen we stellen dat $\delta < \frac{6}{\pi} \Rightarrow |x| < \frac{6}{\pi} \Rightarrow -\frac{6}{\pi} < x < \frac{6}{\pi} \Rightarrow x < \frac{6}{\pi}$

2

$|x| < \frac{\varepsilon}{|\sin \frac{\pi}{6}|} = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}} = 2\varepsilon$ kies $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$

Laat zien dat dit werkt:

$\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < 1$

$\Rightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x < \frac{6}{\pi} \Rightarrow \cancel{\sin \frac{1}{x} < \frac{1}{2}}$

$0 < |x| < \delta \Rightarrow 0 < |x| < 2\varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon < x < 2\varepsilon \Rightarrow x < 2\varepsilon$

dus $x \sin \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = \varepsilon$ dus het klopt dat $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$

namelijk $\delta = \min\{1, 2\varepsilon\}$ $\square$

4 $\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{f(x+h) f(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x) - f(x+h)}{h}}{f(x+h) f(x)}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{f(x+h) f(x)} = \frac{\lim_{h \to 0} -\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\lim_{h \to 0} f(x+h) f(x)} = \frac{-\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\lim_{h \to 0} f(x+h) f(x)}$

$f'(x) \stackrel{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en $\lim_{h \to 0} f(x+h) f(x) = f^2(x)$ ⇒ merk op dat dit ≠0 is omdat f diff ⇒ f cont.

dus $\frac{-\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\lim_{h \to 0} f(x+h) f(x)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$ $\square$

/10

5 $\left(e^{(2x-1)^2} + \int_{2x-1}^{x^2+1} e^{t^2}\, dt \right)'$

10 $\left[\int_{2x-1}^{x^2+1} e^{t^2}\, dt \right]' = \left[F(x^2+1) - F(2x-1) \right] = 2x \cdot f(x^2+1) - 2f(2x-1)$

$= 2x\, e^{(x^2+1)^2} - 2e^{(2x-1)^2}$ $\quad (F'(t) = f(t))$

$\left[e^{(2x-1)^2} \right]' = 4(2x-1)\, e^{(2x-1)^2}$

$\left[e^{(2x-1)^2} + \int_{2x-1}^{x^2+1} e^{t^2}\, dt \right]' = 4(2x-1)e^{(2x-1)^2} + 2xe^{(x^2+1)^2} - 2e^{(2x-1)^2}$

$= (8x-6)e^{(2x-1)^2} + 2xe^{(x^2+1)^2}$

6 $F(r) = \begin{cases} GMr/R^3 & \text{als } r < R \\ GM/r^2 & \text{als } r \geq R \end{cases}$

a $\lim_{r \to a} F(r) = F(a)$ voor alle $a \in \mathbb{R}$

1 Als $r < R$ ~~$F(a) = \frac{GM}{R^3} a$~~

$\lim_{r \to a} F(r) = \lim_{r \to a} \frac{GM}{R^3} r = \frac{GM}{R^3} \cdot \lim_{r \to a} r = \frac{GM}{R^3} a$

$= F(a)$

2 Als $r \geq R$ $\lim_{r \to a} F(r) = \lim_{r \to a} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{\lim_{r \to a} r^2} = \frac{GM}{a^2} = F(a)$

rf!

3 Als $r = R$ $\lim_{r \to R^-} F(r) = \lim_{r \to R^+} F(r)$

$\lim_{r \to R^-} \frac{GM}{R^3} r \stackrel{?}{=} \lim_{r \to R^+} \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \frac{GM}{R^3} \lim_{r \to R^-} r \stackrel{?}{=} \frac{GM}{\lim_{r \to R^+} r^2}$

4/5

$\Rightarrow \frac{GM}{R^3} \cdot R \stackrel{?}{=} \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \frac{GM}{R^2} = \frac{GM}{R^2}$ dit is correct

Dus $F(r)$ is continu $\square$

o $F'(R)$ bestaat

$$\lim_{r \to R^-} F'(r) = \lim_{r \to R^+} F'(r) = F'(R)$$

1/5 $$\lim_{r \to R^-} \frac{GM}{R^3} \stackrel{?}{=} \lim_{r \to R^+} -2\frac{GM}{r^3} \Rightarrow \frac{GM}{R^3} = -2\frac{GM}{R^3}$$ dit is niet correct,

dus is F niet differentieerbaar in $r=R$, omdat niet aan de voorwaarden is voldaan.

linker en rechter limieten niet overeen komen

7 $f(x) = x^x \quad x > 0$

a $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} (e^{\ln(x)})^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}}$$

4/4 $$= e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}} = e^{\frac{-\lim_{x\to 0^+} \ln x}{\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x}}}$$

$\lim_{x \to 0^+} \ln x$ nadert naar $-\infty$ en

$\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x}$ nadert naar $-\infty$ dus mag l'Hospital worden gebruikt

$$e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}} \stackrel{l'H}{=} e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x}}$$

$$= e^{-\lim_{x \to 0^+} x} = e^{-0} = e^0 = 1$$

b $f'(x)$ voor $x > 0$

3/3 ~~$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{(x+h)} - x^x}{h}$~~

$$f'(x) = [x^x]' = [e^{x \ln x}]' = (\ln x + 1)e^{x \ln x} \quad \text{voor } x > 0$$

$$= (\ln x + 1)x^x \quad \text{voor } x > 0$$

c $$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \frac{\lim_{x \to 0^+} x^x - 1}{\lim_{x \to 0^+} x}$$

3/3 $\lim_{x \to 0^+} x^x - 1$ nadert naar 0 zie 7a en

$\lim_{x \to 0^+} x$ nadert naar 0 dus mag l'Hospital worden gebruikt

9 $x^2 y' + xy = 1 \quad \wedge \quad y(1) = 2 \qquad x > 0$

$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$

$\left(I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x \right)$

$xy' + y = \frac{1}{x}$

$(xy)' = \frac{1}{x}$

$xy = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

$y = \frac{1}{x} \ln|x| + \frac{c}{x}$ met $x > 0$

$y(1) = 2 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1} \ln|1| + \frac{c}{1} = 2 \Rightarrow c = 2$

$y(x) = \frac{1}{x} \ln|x| + \frac{2}{x}$ voor $x > 0$